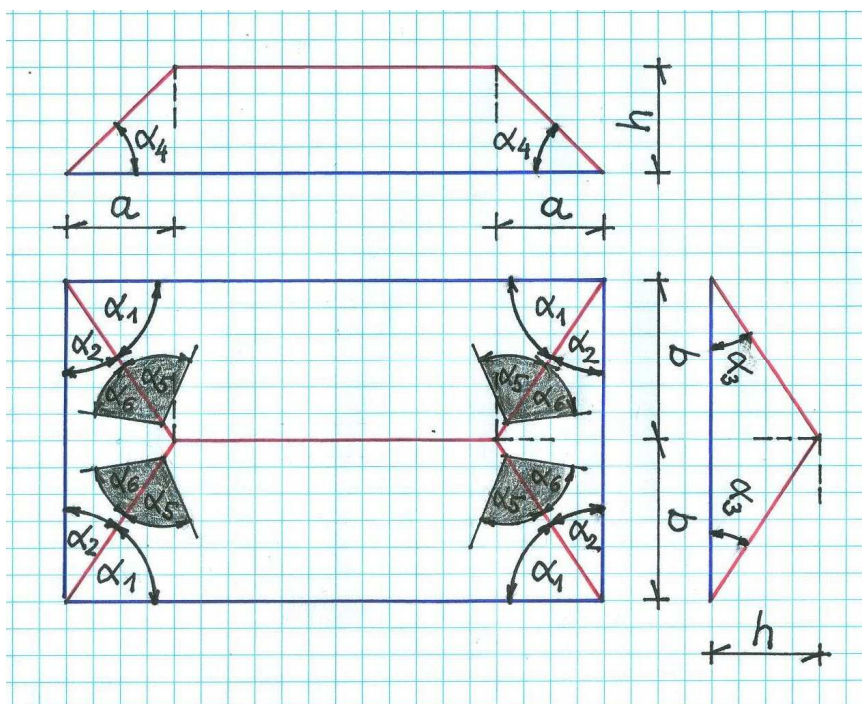


Két tetősík által közbezárt szög meghatározásához

Az [1] műben érdekes szerkesztést és szögösszefüggéseket találtunk, melyek kiválóan alkalmasak két tetősík közbezárt szögének meghatározására.

Az ottani ábrákat kicsit átalakítottuk, a mennyiségek betűjeleit azonban meghagytuk. Először tekintsük az 1. ábrát!



1. ábra

Itt egy szimmetrikus, de nem egyforma tetőhajlásokkal bíró kontytetőt ábrázoltunk, vetületeivel.

Adott: a , b , h .

Keresett: a tetősíkok által bezárt δ szög.

A megoldás első lépéseként tudatosítjuk, hogy az 1. ábrán a keresett szöge(ke)t a felülnézeti képsíkba forgatva ábrázoltuk, a szimmetriának megfelelően eljárva.

Leolvasható, hogy

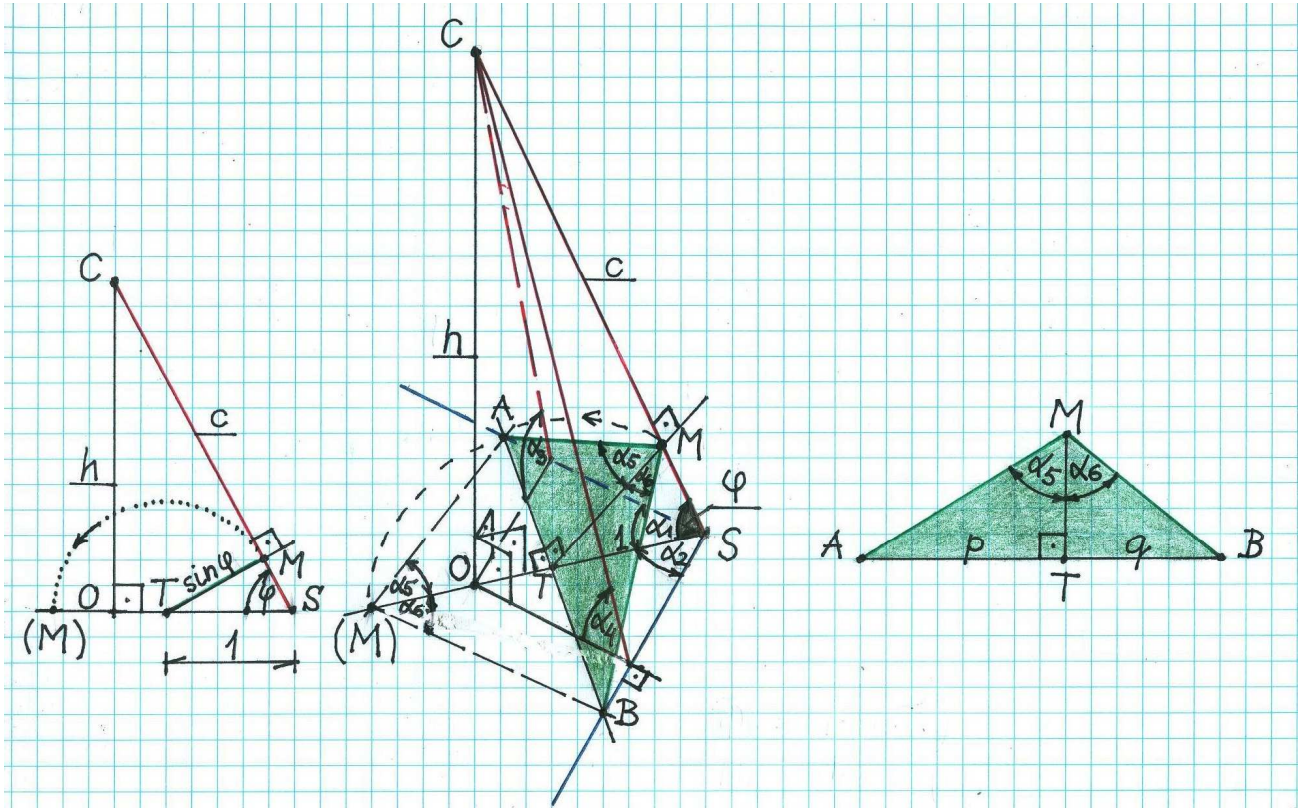
$$\underline{\delta = \alpha_5 + \alpha_6} . \quad (1)$$

A közvetlen feladat tehát az α_5 és α_6 szögek meghatározása.

Ezt kétféleképpen – számítással és szerkesztéssel is – elvégezzük.

Számításos megoldás

Ehhez tekintsük a 2. ábrát is!



2. ábra

A Geometriából tudjuk, hogy két sík hajlásszögét úgy határozzuk meg, hogy a két sík metszéspontjára merőleges síkot állítunk, amely a két síkból kimetsz egy - egy egyenest, melyek közbezárt szöge lesz a két sík hajlásszöge.

Jelen esetben az α_3 és α_4 hajlású két sík metszéspontja a CS él, melyre az M pontban állítottuk a merőleges metszősíkot. A síkokból kimetszett egyenesek az AM és a BM egyenesek, melyek által bezárt, 180° - nál kisebb szög lesz a keresett δ szög.

Az ábrák szerint írhatjuk, hogy

$$\operatorname{tg} \alpha_5 = \frac{\overline{AT}}{\overline{TM}} = \frac{p}{1 \cdot \sin \varphi} = \frac{1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1}{1 \cdot \sin \varphi} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\sin \varphi},$$

tehát:

$$\operatorname{tg} \alpha_5 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\sin \varphi}. \quad (2)$$

Hasonlóképpen:

$$\operatorname{tg} \alpha_6 = \frac{\overline{BT}}{\overline{TM}} = \frac{q}{1 \cdot \sin \varphi} = \frac{1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_2}{1 \cdot \sin \varphi} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\sin \varphi},$$

tehát:

$$\underline{\operatorname{tg} \alpha_6 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\sin \varphi}} . \quad (3)$$

Majd az 1. és 2. ábra alapján az $CS = c$ élhosszra, *térbeli Pitagorász - tétellel*:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + h^2} . \quad (4)$$

Ismét az ábrák szerint:

$$\sin \varphi = \frac{h}{c} . \quad (5)$$

Most az 1. ábra szerint is:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{b}{a} , \\ \operatorname{tg} \alpha_2 &= \frac{a}{b} , \\ \operatorname{tg} \alpha_3 &= \frac{h}{b} , \\ \operatorname{tg} \alpha_4 &= \frac{h}{a} . \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Most (2), (5) és (6) - tal:

$$\operatorname{tg} \alpha_5 = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{h} , \quad (7)$$

innen (4) - gyel is:

$$\operatorname{tg} \alpha_5 = \frac{b}{a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + h^2}}{h} = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 + 1} ,$$

tehát:

$$\operatorname{tg} \alpha_5 = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 + 1} , \quad (8)$$

innen:

$$\alpha_5 = \arctg \left[\frac{b}{a} \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 + 1} \right]. \quad (9)$$

Hasonlóképpen (3), (5) és (6) - tal:

$$\operatorname{tg} \alpha_6 = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{h}, \quad (10)$$

innen (4) - gyel is:

$$\operatorname{tg} \alpha_6 = \frac{a}{b} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + h^2}}{h} = \frac{a}{b} \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 + 1},$$

tehát:

$$\operatorname{tg} \alpha_6 = \frac{a}{b} \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 + 1}; \quad (11)$$

innen:

$$\alpha_6 = \arctg \left[\frac{a}{b} \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 + 1} \right]. \quad (12)$$

Majd (1), (9) és (12) - vel:

$$\delta = \arctg \left[\frac{b}{a} \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 + 1} \right] + \arctg \left[\frac{a}{b} \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 + 1} \right]. \quad (13)$$

Ezzel előállt a keresett $\delta = f(a, b, h)$ kifejezés.

Szerkesztéses megoldás

Ezt valójában az 1. és 2. ábrákkal már elő is készítettük – 3. ábra.

Most (14) igazolását mutatjuk be, az első képlet esetére.

Először (14 / 1) bal oldalát alakítjuk át (8) - cal:

$$\begin{aligned}\cos \alpha_5 &= \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha_5}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{a} \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 + 1}\right)^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \left[\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 + 1\right]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{h}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{h}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}},\end{aligned}$$

tehát:

$$\cos \alpha_5 = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{h}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{h}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}}. \quad (15)$$

Most (14 / 1) jobb oldalával dolgozunk, (6) - ot is felhasználva:

$$\cos \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha_1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}}; \quad \sin \alpha_3 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_3}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha_3}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_3}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{h}\right)^2}};$$

$$\begin{aligned}\cos \alpha_1 \cdot \sin \alpha_3 &= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{h}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{h}\right)^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{h}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{h}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}},\end{aligned}$$

tehát:

$$\cos \alpha_1 \cdot \sin \alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{h}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{h}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}}. \quad (16)$$

Minthogy (15) és (16) jobb oldalai megegyeznek, így bal oldalai is, vagyis (14 / 1) érvényes. Hasonlóan eljárva beláthatjuk (14 / 2) érvényességét is.

M2. A figyelmes Olvasónak a (2) és (3) képletek ismerősek lehetnek. Ez nem a véletlen műve; ugyanis egy korábbi dolgozatunkban – melynek címe:

Az ötszög keresztmetszetű élszarufa keresztmetszetének kialakításáról – hasonló alakú képletek álltak elő.

Az ottani és az itteni ábrákat egybevetve bizonyos szögekre, kapjuk, hogy

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= 90^\circ - \alpha_5, \\ \gamma_2 &= 90^\circ - \alpha_6, \\ \varepsilon_1 &= \alpha_1, \\ \varepsilon_2 &= \alpha_2. \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

Az ottani (1) képlettel és az itteni (*) - gal:

$$\left. \begin{aligned} \left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma_1 &= \frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \varepsilon_1}, \\ \varepsilon_1 &= \alpha_1, \end{aligned} \right\} \rightarrow \operatorname{tg} \gamma_1 &= \frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \alpha_1}; \\ \gamma_1 &= 90^\circ - \alpha_5, \end{aligned} \right\} \rightarrow \operatorname{tg} (90^\circ - \alpha_5) &= \frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \alpha_1}; \\ \operatorname{tg} (90^\circ - \alpha_5) &= \operatorname{ctg} \alpha_5 = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_5} \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha_5} = \frac{\sin \varphi}{\operatorname{tg} \alpha_1} \rightarrow \operatorname{tg} \alpha_5 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\sin \varphi}.$$

α_6 - ra is alkalmazva egy teljesen hasonló levezetést, beláthatjuk, hogy a régebbi és az újabb képletek megerősítik egymást.

M3. Most nézzünk egy számpéldát, az 1. és a 3. ábra adataival!

Adott:

$$\left. \begin{aligned} a &= 2,00 \text{ (m)}; \\ b &= 3,00 \text{ (m)}; \\ h &= 2,00 \text{ (m)}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{A})$$

Keresett: δ .

Megoldás:

a.) Számítással, a (13) képlettel és (A) - val: $\delta_{\text{szám}} \cong 126,0^\circ$.

b.) Szerkesztéssel / szögméréssel: $\delta_{\text{mér}} \cong 125^\circ$.

Látjuk, hogy a kétféle úton nyert eredmény jól egyezik.

Természetesen a számított eredmény a pontosabb.

Irodalom:

- [1] – Red.: **N. P. Melnyikov**: Sztalnüje konsztrukcii
Szpravocsnik konsztruktora, izd. 2 - je, 54. o.
Izdatyelsztvo Lityeraturü Po Sztroityelsztvu, Moszkva, 1972.

Összeállította: **Galgóczy Gyula**
mérnökstanár

Sződliget, 2013. június 19.